FACULTAD DE MATEMÁTICAS
PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE

C2030
CIENCIA E INNOVACIÓN DESDE LA UC PARA CHILE Y EL MUNDO

Orientaciones para la construcción y la escritura de una demostración

Mahsa Allahbakhshi[1], Antonio Behn[1], Duvan Henao[1], Natalia Leiva[2] y Ricardo Menares[1]

[1]Facultad de Matemáticas UC

[2]Proyecto Ciencia 2030 UC

Índice

Introducción

Ser capaz de demostrar proposiciones es una habilidad esencial en estadística y matemática, por múltiples razones. Algunas veces es porque da sustento a un método práctico, como al demostrar que la distribución de probabilidad de los resultados de un experimento binario, repetido suficientes veces, se acerca tanto como uno quiera a la conocida distribución normal. Este teorema nos hace confiar más en el uso de la distribución normal en mecanismos de decisión que afectan nuestras vidas, por ejemplo, al establecer rangos de valores en exámenes de laboratorio para el diagnóstico de enfermedades. Otras veces es por el valor que tiene una demostración en sí misma, aunque no tenga aplicaciones prácticas. Un ejemplo es demostrar que el camino más corto entre dos puntos es la línea recta. Sabemos que esto es cierto, y construimos caminos basados en eso, sin que una demostración matemática sea necesaria. Sin embargo, proponerse demostrarlo es un desafío digno de nuestras capacidades mentales como seres humanos y la experiencia de comprobar matemáticamente que algo es cierto resulta siempre una experiencia fascinante. En Matemáticas, establecemos que una proposición es verdadera mediante una **demostración matemática**.

En términos generales, se puede considerar que hacer matemáticas tiene dos etapas. La primera etapa es creativa y consiste en convencerse de que se ha resuelto el problema. La segunda etapa, igualmente importante, consiste en convencer a otras personas de que se ha resuelto el problema por medio de una demostración, es decir, un argumento convincente de que una determinada afirmación matemática es cierta. Esta segunda etapa es diferente de la primera, ya que no se comunica necesariamente el proceso a través del cual se ha encontrado la solución. Una demostración generalmente utiliza razonamiento deductivo y lógica, pero también contiene cierta cantidad de lenguaje verbal. Dado que una demostración debe convencer a otras personas de que un resultado es cierto, no consideramos que una demostración esté completa hasta que esté bien escrita. Además, en el proceso de escribir cuidadosamente una demostración es posible advertir elementos que se pasaron por alto en la etapa creativa.

Si bien la escritura de demostraciones se va madurando a lo largo del tiempo, es de mucha ayuda tener presente que estas tienen una cierta estructura y un determinado modo de hilarse en general. El propósito de este documento es orientar la escritura de demostraciones destacando su estructura de forma explícita, para que profesores, ayudantes y estudiantes tengan un lenguaje común para hablar sobre ella. El documento se organiza en tres capítulos. En el primero, se presenta y ejemplifica la estructura general de una demostración. En el segundo, se profundiza en las demostraciones condicionales. En el tercero, se exponen y ejemplifican ocho recomendaciones generales para la escritura de demostraciones.

I. La estructura general de las demostraciones

Para entender cuál es la estructura general de las demostraciones, comencemos por observar un ejemplo:

(1)

Demuestre que el producto de dos números impares es impar.

Solución:
Supongamos que x e y son números impares. Demostremos que el producto xy es impar.

Como x es impar, sabemos que puede escribirse como
$x = 2n + 1$, para algún entero n.
En forma similar, que y sea impar implica que puede escribirse como
$y = 2m + 1$, para algún entero m.
Se sigue que
$xy = (2n+1)(2m+1) = 4nm + 2n + 2m + 1 = 2(2nm + n + m) + 1$.
Concluimos que xy puede escribirse como
$xy = 2k + 1$,
para un cierto entero k, a saber, $k=2nm+n+m$. Por lo tanto, xy es impar, que es lo que queríamos demostrar.

Independientemente del proceso intuitivo y creativo mediante el cual a alguien se le ocurre una solución, la demostración misma se estructura como un **razonamiento deductivo**. Es decir, para llegar a la afirmación que se quiere demostrar, se establece una concatenación de proposiciones en la que unas proposiciones se deducen de otras. En una demostración, podemos identificar cuatro tipos de proposición (proposiciones sabidas por conocimiento matemático, hipótesis, proposiciones intermedias y tesis) y las conexiones que las van relacionando.

Proposiciones sabidas por conocimiento matemático

El punto de partida de la demostración (1) es todo aquello que ya habíamos establecido que era cierto. Por ejemplo, al comienzo de la demostración usamos dos veces que

si un número es impar, entonces puede escribirse como 2n+1 *para algún entero* n,

y al final de la demostración usamos que

si un número puede escribirse como 2k+1 *para algún entero* k, *entonces es impar*.

Estas son proposiciones que forman parte de lo que ya sabíamos y podíamos emplear en la demostración, porque asumimos que se demostraron antes. Otras proposiciones sabidas en la demostración (1) son las siguientes propiedades de los números enteros:

- que $(2n+1)(2m+1) = 4nm + 2n + 2m + 1$ para cualquier par de enteros n y m;
- que $4nm + 2n + 2m = 2(2nm + n + m)$ para cualquier par de enteros n y m;

Hipótesis de la demostración

La demostración (1) comenzó definiendo dos variables *(x* e *y*) y estableciendo una hipótesis sobre ellas mediante la siguiente frase:

Supongamos que x e y son números impares

“Supongamos que…” y “Sean…” son recursos utilizados con frecuencia para establecer la hipótesis en la que se basará la demostración (en este caso, que alguna propiedad se cumple para *todo par* de elementos de un conjunto).

Proposiciones intermedias

Durante la demostración (1) también aparecieron **proposiciones intermedias** que fueron deducidas de las proposiciones sabidas y de las hipótesis ya mencionadas:

- xy puede escribirse como $(2n+1)(2m+1)$ para algún par de enteros n y m,
- $xy = 4nm + 2n + 2m + 1$,
- $xy = 2(2nm + n + m) + 1$,
- xy puede escribirse como $2k+1$ para algún entero k.

Conexiones

Para llegar a deducir que xy es impar, que es la conclusión a la que se quiere llegar, cada paso de la demostración debe justificarse. Para hilar un eslabón con el siguiente en esta cadena de afirmaciones, usamos **conexiones** como las que se subrayan a continuación:

- *Como* x *es impar*, *sabemos que* *puede escribirse como* x = 2n +1, *para algún entero* n.
- *Que* y *sea impar* *implica que* *puede escribirse como* y = 2m + 1, *para algún entero* m.
- *Se sigue que* xy = (2n+1)(2m+1) = 4nm + 2n + 2m + 1 = 2(2nm + n + m) +1.
- *Concluimos que* xy *puede escribirse como* xy = 2k + 1 *donde* k=2nm+n+m.

Estas conexiones no son exclusivas de la matemática; podemos encontrarlas también, por ejemplo, en un contrato legal o un discurso filosófico. Sin ellas, los distintos pasos de nuestro razonamiento quedan descontextualizados y quien los lee tendrá que “llenar el vacío” que dejamos, lo que dificulta el proceso de interpretación de nuestra demostración.

II. La demostración de una proposición condicional

En la demostración (1) demostramos que:

si x *e* y *son impares, entonces* xy es impar.

Esta es una **proposición condicional** (a veces denominada, simplemente, “condicional”), es decir, una proposición de la forma "si P, entonces Q", donde P y Q son, a su vez, proposiciones[1]. Para que la proposición "si P, entonces Q" sea verdadera, Q debe ser verdadera cada vez que P es verdadera. La proposición A se llama **hipótesis**[2] de la proposición condicional, y la proposición B se llama **conclusión o tesis** del condicional.

[1] Por “proposición” entendemos una oración declarativa que debe tener un **valor de verdad** definido, ya sea verdadero o falso, pero no ambos. Una frase como ‘El cielo es hermoso’ no es una proposición, ya que si la frase es verdadera o no es una cuestión de opinión. La pregunta ‘¿Está lloviendo?’ tampoco es una proposición porque no está declarando que algo es verdadero o falso, sino preguntando.

[2] Este uso de la palabra “hipótesis” difiere del que tiene en el método científico.

Las proposiciones condicionales "si **P**, entonces **Q"** cumplen un rol clave en el razonamiento matemático. Estas no solo se establecen mediante la expresión "si… entonces". Existe una serie de expresiones equivalentes que permiten formular una proposición condicional, las que se muestran y ejemplifican en la siguiente tabla**:**

Expresión	**Ejemplo** (asumiendo que x es un número real cualquiera)
Si **P**, entonces **Q**	Si $x>1$, entonces $x^2>1$
Si **P**, **Q**	Si $x>1$, $x^2>1$
Si **P**, concluimos que **Q**	Si $x>1$, concluimos que $x^2>1$
P → **Q**	$x>1 \rightarrow x^2>1$
P implica **Q**	$x>1$ implica $x^2>1$
P es suficiente para **Q**	$x>1$ es suficiente para $x^2>1$
Basta que **P** para **Q**	Basta que $x>1$ para que $x^2>1$
Q si P	$x^2>1$ si $x>1$
Q se sigue de **P**	$x^2>1$ se sigue de $x>1$
Q siempre que **P**	$x^2>1$ siempre que $x>1$
Q es necesario para **P**	$x^2>1$ es necesario para $x>1$

¿Cómo descubrir la secuencia lógica de pasos de en una demostración? Con frecuencia determinar cómo obtener que la conclusión Q es verdadera no es una tarea sencilla. El siguiente método exploratorio puede ayudar a descubrir los pasos de una demostración. En este método trabajamos hacia adelante desde la hipótesis P, y hacia atrás desde la conclusión Q. Podemos usar una tabla e ir llenándola poco a poco, para organizar los pasos de la demostración.

Lo primero que debemos hacer es identificar la hipótesis, P, y la conclusión, Q, de la proposición condicional. En el ejemplo estudiado, tenemos que

P representa la afirmación "x e y son impares",
Q representa la afirmación "xy es impar".

Ahora tratamos a P como aquello que sabemos y tratamos a Q como lo que queremos mostrar. Organizamos esto usando P como el primer paso en la parte de arriba de la tabla que corresponde a *lo sabido*, y Q como el último paso en la parte de debajo de la tabla que corresponde a *lo que queremos llegar*:

Paso	**Sé**	**Razón**
P	x e y son enteros impares	Hipótesis
$P1$		

⋮	⋮	⋮
$Q1$		
Q	$x·y$ es un entero impar	?
Paso	**Muestro**	**Razón**

Todavía no hemos rellenado la razón del último paso porque aún no sabemos cómo vamos a alcanzar el objetivo. La idea ahora es hacernos preguntas sobre lo que sabemos y lo que intentamos demostrar. Por lo general, empezamos con la conclusión que intentamos demostrar formulando la llamada ‘pregunta retrospectiva’. La forma básica de la pregunta es: "¿Bajo qué condiciones podemos concluir que Q es verdadera?". La manera de formular la pregunta es crucial, ya que debemos ser capaces de responderla. Primero debemos formular y responder la pregunta de forma abstracta y luego aplicarla a la forma particular del enunciado Q.

En este caso, estamos tratando de demostrar que algún número entero es un número entero impar. Así que nuestra pregunta inversa podría ser: "¿Cómo demostramos que un número entero es impar?". En este momento, la única manera que tenemos de responder a esta pregunta es utilizar la definición de un número entero impar. Así que nuestra respuesta podría ser: "Tenemos que demostrar que existe un número entero q tal que el número entero en consideración puede escribirse como $2q + 1$". Aplicamos esta respuesta al enunciado Q y la insertamos como la penúltima línea en la tabla de conocimientos:

Paso	**Sé**	**Razón**
P	x e y son enteros impares	Hipótesis
$P1$		
⋮	⋮	⋮
$Q1$	Existe un entero q tal que $x·y = 2q + 1$	
Q	$x·y$ es un entero impar	Definición de un entero impar
Paso	**Muestro**	**Razón**

Ahora centramos nuestro esfuerzo en demostrar el enunciado Q1, ya que sabemos que si podemos demostrar Q1, entonces podemos concluir que Q es verdadero. Hacemos una pregunta retrospectiva sobre Q1 como: "¿Cómo podemos demostrar que existe un entero q tal que $x·y = 2q + 1$?" Es posible que no tengamos una respuesta preparada para esta pregunta, por lo que miramos la parte conocida de la tabla e intentamos conectar la parte conocida con la parte demostrada. Para ello, trabajamos hacia adelante desde el paso P, y esto implica hacer una pregunta hacia adelante. La forma básica de este tipo de pregunta es: "¿Qué podemos concluir del hecho de que P es verdadero?". En este caso, podemos utilizar la definición de número entero impar para concluir que existen números enteros m y n tales que $x = 2m + 1$

e $y = 2n + 1$. Llamaremos a esto Paso P1 en la tabla de conocimientos. Es importante notar que hemos tenido cuidado de no utilizar la letra q para denotar estos enteros. Si hubiéramos usado q de nuevo, estaríamos afirmando que el mismo número entero que da $x{\cdot}y = 2q + 1$ también da $x = 2q + 1$. Por eso usamos m y n para los enteros x e y, ya que no hay garantía de que x sea igual a y. La regla básica es usar un símbolo diferente para cada objeto nuevo que introducimos en una demostración. Así que en este punto, tenemos:

- Paso P1. Sabemos que existen enteros m y n tal que $x = 2m + 1$ e $y = 2n + 1$.
- Paso Q1. Necesitamos probar que existe un entero q tal que $x{\cdot}y = 2q + 1$.

Siempre debemos buscar una manera de vincular la parte "sé" con la parte "muestro". Podemos sacar conclusiones a partir de $P1$, pero a medida que avanzamos, debemos tener siempre presente la forma del enunciado de $Q1$. La siguiente pregunta es: "¿Qué podemos concluir sobre $x{\cdot}y$ a partir de lo que sabemos?". Una forma de responder a esto es utilizar nuestros conocimientos previos de álgebra. Es decir, primero podemos usar la sustitución para escribir $x{\cdot}y = (2m + 1)(2n + 1)$. Aunque esta ecuación no demuestra que $x{\cdot}y$ es impar, podemos usar el álgebra para intentar reescribir el lado derecho como alguna otra expresión que podamos reconocer como un entero impar, para poder llegar al paso $Q1$. Primero expandimos el lado derecho de la ecuación para obtener

$$\begin{aligned} x{\cdot}y &= (2m + 1)(2n + 1) \\ &= 4mn + 2m + 2n + 1. \end{aligned}$$

Ahora comparamos el lado derecho de la última ecuación con el lado derecho de la ecuación del paso Q1. A veces la parte difícil en este punto es darse cuenta de que q representa algún número entero (cualquiera) y que lo que tenemos que demostrar es que $x{\cdot}y$ es igual a dos veces algún número entero más uno. ¿Podemos ahora llegar a esa conclusión? La respuesta es sí, porque podemos factorizar el número 2 desde los tres primeros términos del lado derecho de la ecuación y obtener

$$\begin{aligned} x{\cdot}y &= 4mn + 2m + 2n + 1 \\ &= 2(2mn + m + n) + 1. \end{aligned}$$

Ahora podemos completar, como sigue, la tabla que muestra el esquema de la demostración:

Paso	**Afirmación**	**Razón**
P	x e y son enteros impares	Hipótesis
$P1$	Existen enteros m y n tal que $x = 2m + 1$ e $y = 2n + 1$	Propiedad de un entero impar
P2	$xy = (2m + 1)(2n + 1)$	Sustitución
$P3$	$xy = 4mn + 2m + 2n + 1$	Álgebra
$P4$	$xy = 2(2mn + m + n) + 1$	Álgebra
$P5$	$2mn + m + n$ es un entero	Clausura del conjunto de números enteros
$Q1$	Existe un entero q tal que $xy = 2q + 1$	Usa $q = (2mn + m + n)$

Q	$x \cdot y$ es un entero impar	Definición de un entero impar

Es muy importante notar que solo hemos construido *el bosquejo* de lo que será después una demostración. Las demostraciones matemáticas no se escriben como una tabla, sino utilizando frases completas con una estructura de párrafos. Además, la mayoría de las demostraciones se escriben desde lo ya sabido hacia adelante y no en la dirección contraria. Es decir, aunque el uso del proceso hacia atrás fue esencial para construir la demostración, cuando la escribimos utilizamos el proceso hacia adelante descrito en la tabla anterior. La demostración completa es (1), que se encuentra al comienzo del capítulo I.

III. Recomendaciones generales de escritura

Este capítulo presenta nueve recomendaciones para hacer demostraciones matemáticas, cada una con uno o más ejemplos de ejercicios y un análisis de aspectos importantes de considerar a la hora de pensar una estrategia para resolverlos.

1) Decodifica

Antes de empezar a escribir la demostración, debemos dedicar algunos minutos previos a entender el problema, decodificando los conceptos que están involucrados, tanto la afirmación que se quiere demostrar, como los símbolos, hipótesis y cuantificadores.

1.a) Decodifica la afirmación que se quiere demostrar

Ejemplo:

Demuestre que la función $f:[0,\infty)\mapsto\mathbb{R}^2$, $f(x)=x^2$ es inyectiva.

Análisis:
En este caso, decodificar el significado de “función inyectiva” nos dará una pista para comenzar la demostración:

Definición: decimos que una función f *es inyectiva si dado cualquier par de números distintos* x *e* y *en el dominio de la función, sus imágenes* f(x) *y* f(y) *son distintas.*

Esto sugiere que nuestra demostración podría comenzar de la siguiente manera:

Sean $x, y \in [0,\infty)$, $x \neq y$

y que el paso siguiente consiste en mostrar que $x^2 \neq y^2$. Como vemos, el solo hecho de tener presente que deben decodificarse los conceptos involucrados, nos muestra el camino para comenzar la demostración. Llegados a este punto, es más fácil que se nos ocurra que podemos continuar separando la demostración en dos casos, uno en que $x < y$, otro en que $x > y$. Una vez se nos ocurre esto, el problema se reduce al ejercicio más asequible de mostrar que, dados dos números positivos, el cuadrado del número menor es más pequeño que el cuadrado del número mayor.

1.b) Decodifica el significado de los símbolos matemáticos

Ejemplo:

Demuestre que si x es un número real, entonces $\sqrt{\boldsymbol{x^2}} = |\boldsymbol{x}|$.

Análisis:
En este ejemplo, decodifiquemos el significado del signo $\sqrt{}$ y de las barras verticales | **|.**

dado cualquier número real no negativo x el símbolo $\sqrt{\boldsymbol{x}}$ denota el único número real no negativo cuyo cuadrado es x. En otras palabras $\boldsymbol{y} = \sqrt{\boldsymbol{x}}$ quiere decir que $y^2 = x$ con $y \geq 0$.
y
el valor absoluto $|\boldsymbol{x}|$ de un número x se define como x si $x \geq 0$ y como $-x$ si $x < 0$. En particular siempre se tiene $|\boldsymbol{x}| \geq \boldsymbol{0}$.

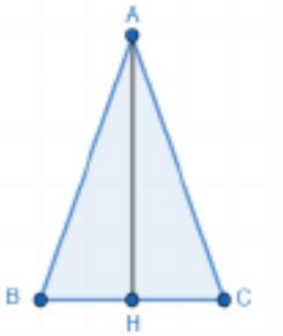
A partir de estas definiciones, no es difícil demostrar lo pedid; solo falta comprobar que $|\boldsymbol{x}|^{\boldsymbol{2}} = \boldsymbol{x^2}$.

1.c) Decodifica el significado de las hipótesis

Ejemplo:

Demuestre que en un triángulo isósceles, la bisectriz del ángulo opuesto a la base, corta a la base en su punto medio y es perpendicular a ella.

Análisis:
En este ejercicio es importante decodificar tanto las hipótesis como las afirmaciones a las que se quiere llegar como resultado de la demostración. Para darle nombre a los distintos elementos del triángulo isósceles en consideración, conviene dibujar una figura como la siguiente:



En este caso hemos llamado A, B y C a los vértices, y H al punto en que la bisectriz en A corta a la base BC. A continuación, la hipótesis "AH es bisectriz" la decodificamos reescribiéndola como:

$$\angle BAH = \angle CAH$$

y la hipótesis de que el triángulo es isósceles la expresamos ahora usando nuestra notación:

$$AB = AC.$$

Las afirmaciones que se quieren demostrar, a saber, "la bisectriz corta a la base en su punto medio" y "la bisectriz es perpendicular a la base", se convierten (al haber hecho la figura e introducido nuestra notación) en:

$$BH = HC$$
$$\angle BHA = 90^{o}.$$

Este proceso de reescribir las hipótesis y las conclusiones buscadas (usando una notación más concreta) ayuda a "asir mejor" las afirmaciones involucradas y a ver más claramente maneras posibles de conectarlas. En este ejercicio concreto, el anterior proceso de decodificación hace más factible que uno se dé cuenta de que, en virtud del criterio "lado-ángulo-lado", los triángulos *BAH* y *CAH* son congruentes. De partida, esto inmediatamente implica que *BH=HC*, que es una de las afirmaciones que queríamos demostrar. Por otra parte, al ver que los triángulos son congruentes, es más fácil observar que, en consecuencia, los ángulos $\angle BHA$ y $\angle BHA$ miden lo mismo. Como sumados forman 180º, cada uno de ellos mide 90º, que es lo que queríamos demostrar.

1.d) Decodifica cuantificadores existenciales y universales

Ejemplo:

Demuestre que si n y m son números enteros de la misma paridad (ambos pares o ambos impares), entonces n - m es par.

Análisis:
En este ejercicio es preciso decodificar que la conclusión "*n - m* es par" debe ser demostrada **para todo** par de números enteros *n* y *m* de la misma paridad, no sólo para algunos pares de enteros *n* y *m* que se ofrezcan como ejemplos. Es común encontrar entre estudiantes de primer semestre respuestas como la siguiente:

> *Hay que considerar por separado el caso en que ambos son pares y el caso en que ambos son impares. Para el caso par, sean* n=6 *y* m=4. *Entonces* n - m = 2, *que es par. Para el caso impar, sean* n=9 *y* m=7. *Entonces* n - m = 2 *que es par*[3].

Que este error sea frecuente muestra que una dificultad no menor del ejercicio es hacer el proceso de decodificación mencionado antes: descubrir que, "entre líneas" en el enunciado, hay un "para todo" (en lugar de algo de la forma "Demuestre que **existe** un par de enteros cuya resta es par".) Este descubrimiento da una pista de cómo comenzar la demostración:

> *Sean* n *y* m *dos números enteros* ***cualesquiera*** *con la misma paridad. Consideremos por separado el caso en que ambos son impares y el caso en que ambos son pares*

Llegado a este punto, es más fácil que se nos ocurra que el paso siguiente consiste en decodificar los conceptos de número par y de número impar:

> *Si ambos son pares, entonces existen enteros* j *y* k *tales que*
> n=2j *y* m=2k.
> *En consecuencia,* n - m = 2(j-k). *Al ser múltiplo de* 2, *se concluye que* n - m *es par.*
> *Si ambos son impares, entonces existen enteros* j *y* k *tales que*
> n = 2j - 1 *y* m = 2k - 1.
> *En consecuencia,* n - m = 2(j-k). *Al ser múltiplo de* 2, *se concluye que* n - m *es par.*

[3] Esta solución presenta el error #2 "Hacer casos especiales y pretender que constituyen una demostración" del documento "Errores comunes en la escritura de una demostración".

Habiendo visto todos los casos, se concluye que la diferencia de números enteros de la misma paridad es siempre par, que es lo que queríamos demostrar.

2) Explicita cuáles son tus hipótesis y qué es lo que quieres demostrar

Comienza la demostración escribiendo qué estás suponiendo como cierto a través de expresiones como "Supongamos que …" o bien "Sean … tales que". Comenzar por esto, por lo general, hace que el problema se reduzca a demostrar una proposición más sencilla que la inicial, de modo que, para fabricar una demostración grande, se construyen sub-demostraciones de resultados más pequeños. Al llegar a estos sub-problemas, escribe qué es lo que hay que demostrar una vez hechos esos supuestos.

Ejemplo:

Demuestre que el cuadrado de todo entero impar es un entero impar.

Análisis:
En este ejemplo, una manera adecuada de empezar sería la siguiente:

Supongamos *que x es un entero impar cualquiera.* **Lo que queremos demostrar es que** *x^2 es impar (...)*

3) Define toda variable o notación antes de usarla

En tu demostración, debes dejar claro lo que representan todos los símbolos empleados, tal como se muestra (en azul) en los siguientes ejemplos:

- **Ejemplo 1:** Demuestre que todo triángulo isósceles tiene dos ángulos iguales.

  Inicio de solución: **Sea** ABC un triángulo isósceles con $AB=AC$. **Sean** α, β y γ, respectivamente, los ángulos opuestos a los vértices A, B y C [...]

- **Ejemplo 2:** Demuestre que todo polinomio de grado impar con coeficientes reales tiene al menos una raíz real.

  Inicio de solución: **Dado**
  $$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$
  un polinomio cualquiera de grado impar, el teorema fundamental del álgebra nos garantiza que este polinomio tiene n raíces complejas (contando multiplicidades) [...]

- **Ejemplo 3:** Demuestre que para todo n mayor que 10, $1/3^n$ *es menor que* 1/19.

  Solución #1: **Supongamos** que n es un entero mayor que 10. Entonces
  $$3^n > 3^{10} > 3^3 = 27 > 19.$$
  Por lo tanto, $1/3^n$ es menor que $1/19$, como queríamos demostrar.

Solución #2: **Supongamos** que n es un entero mayor que 10. Usando la desigualdad de Bernoulli[4], a saber:

$$(1+x)^n \geq 1 + nx \quad \text{para cualquier } x \geq -1.$$

reemplazando x por 2, descubrimos que

$$3^n \geq 1 + 2n > 21 > 19.$$

En consecuencia, $1/3^n < 1/19$, que es lo que queríamos demostrar.

4) Justifica los pasos en la demostración

En una demostración, debe ser posible identificar, en cada línea, qué se deduce y por qué esta deducción es lógica. Como pauta general, los argumentos de la demostración deben ser suficientemente detallados como para convencer a alguien con la formación de un(a) estudiante del curso en el que estás haciendo la demostración. Así, debemos explicar lo que queremos hacer y justificar cualquier hecho que no sea obvio, particularmente los casos especiales a los que el razonamiento general no aplica.

Por ejemplo, si queremos dividir el problema en dos casos, debemos declararlo al principio diciendo: *Consideramos dos casos y demostramos la afirmación en cada caso*. Si invocamos un resultado que se demostró anteriormente en el curso, debemos citarlo y verificar explícitamente que se cumplen sus hipótesis diciendo algo como: *Por teorema 2.3 sabemos que…* O *por la proposición demostrada en la clase que dice "raíz cuadrada de 2 no es un número racional", podemos concluir que….*

Ejemplo:

Sean $a, b \in R$. Demuestre que si $ab = 0$ entonces $a = 0$ o bien $b = 0$.

Solución: Sean a, b números reales tal que $ab = 0$. Se quiere probar que $a = 0 \vee b = 0$. Si $b = 0$, no hay nada más que demostrar. Supongamos que $b \neq 0$. Según las propiedades del cuerpo de números reales b posee inverso multiplicativo y multiplicando la ecuación ab=0 por b^{-1}se obtiene:

$(ab) \cdot b^{-1} = 0 \cdot b^{-1}$. Por una proposición que demostramos en la clase, $0 \cdot b^{-1}$=0. Entonces tenemos $a(b \cdot b^{-1}) = 0$. Por lo tanto $a \cdot 1 = 0$. Como 1 es el neutro multiplicativo, se concluye que $a = 0$. □

5) Considera encontrar un *contraejemplo* para refutar una afirmación

Se puede establecer que una afirmación es falsa encontrando un solo ejemplo en el que las hipótesis se cumplen, pero la afirmación falla. A tal ejemplo lo llamamos *contraejemplo*. Los contraejemplos nos ayudan a entender los límites de la verdad. Encontrar un contraejemplo puede requerir mucho esfuerzo y creatividad. Sin embargo, cuanto más practicas, mejor te vuelves. Puedes empezar preguntándote ¿falta alguna hipótesis para llegar a la conclusión?

[4] Esta es una de las maneras de demostrar la propiedad más general: *Dado cualquier número real* z *tal que* 0 < z < 1, *la cantidad* z^n se hace *arbitrariamente pequeña si* n *se elige lo suficientemente grande.* En este caso, estamos adaptando la demostración al caso particular en que $z = 1/3$. También en el caso general, la conclusión se obtiene al escribir z como $z = 1/(1+x)$ para algún $x > 0$.

Ejemplo:

¿Es verdad que la suma de dos números reales siempre es mayor que ambos números?

Análisis:
La respuesta es no. Para justificar esta respuesta, debemos demostrar que la afirmación "la suma de dos números reales siempre es mayor que ambos números" es falsa. Para justificar esto, basta con presentar un contraejemplo, como el siguiente:

5 y -3 son números reales. Sin embargo, su suma no es mayor que 5.

6) Verifica que usaste todas las hipótesis

Una vez presentado un razonamiento, es una buena práctica verificar si se han usado todas las hipótesis. Este proceso puede ayudarnos a entender mejor el contenido matemático del análisis expuesto y eventualmente detectar errores.

Ejemplo:

Suponga que $x > 5$**. Demuestre que** $x - 2 > \sqrt{x^2 - 10x + 20}$.

Solución errónea:

- Sabemos que
$$-2 > -5$$
- Si x es un número real cualquiera, lo podemos sumar a ambos lados de la inecuación sin cambiar su sentido obteniendo
$$x - 2 > x - 5$$
- Como $(x-5)^2 = x^2 - 10x + 25$, tenemos
$$x - 2 > \sqrt{x^2 - 10x + 25} > \sqrt{x^2 - 10x + 20}.$$
- Esto concluye la demostración.

Análisis:

- Notamos que no hemos usado la hipótesis $x > 5$. ¿Será cierta la proposición sin ella? Si reemplazamos $x = 1$ en la desigualdad, llegamos a algo claramente falso:
$$1 - 2 = -1 > \sqrt{1 - 10 + 20} = \sqrt{11}$$
- Esto nos obliga a revisar nuestro argumento pues debe tener un error. Una demostración correcta no admite contraejemplos.
- El problema está en suponer que $\sqrt{(x-5)^2} = x - 5$ sin garantizar antes que $(x - 5) > 0$. Esto es equivalente a la hipótesis que olvidamos usar.

7) Indica cuándo se ha completado la demostración

Aunque pueda parecer repetitivo, es una buena práctica terminar una demostración explícitamente, ya sea con una frase que indique con precisión lo que se ha demostrado o simplemente escribiendo: "Esto completa la demostración". También se puede utilizar algún "símbolo de fin de demostración" como “el punto cuadrado”: □

8) Revisa el orden en que debe leerse la demostración

El propósito principal de escribir una demostración es comunicar tu razonamiento a un lector o una lectora. Por lo tanto, debes escribir con un orden lineal sensato y evitar a toda costa que tu demostración se transforme en un conjunto de ideas sin contexto conectadas por flechas. En este sentido, las demostraciones en los textos que componen la bibliografía del curso y en clase son buenos modelos para un formato adecuado. Al terminar de escribir tu demostración, es recomendable que la leas imaginando cómo la entendería otra persona. Puedes usar las siguientes preguntas para revisar lo que has escrito:

- ¿Está claro en qué orden debe leerse la demostración?
- ¿Está claro el propósito de cada línea?
- ¿Está claro cuáles afirmaciones son hipótesis, cuáles son las que estás a punto de demostrar y cuáles son deducciones?
- ¿La demostración comienza con proposiciones sabidas y avanza hacia la tesis o conclusión deseada?

También es una buena práctica pedirle a otra persona que revise tu demostración, para que te diga qué aspectos necesitan aclaración.

9) Destaca las ecuaciones y expresiones matemáticas importantes

Cambiar entre el lenguaje coloquial y el lenguaje simbólico es, de hecho, alternar entre dos lenguajes (como hablar “*spanglish*”) y puede dificultar la comprensión. Por lo general es necesario hacerlo, para no ocupar tanto espacio. Pero hay momentos en donde los cálculos son tan importantes que es mejor escribirlos desplegándolos en un renglón aparte, con líneas en blanco antes y después de ellos, aunque la demostración quede más larga. Si el lado izquierdo de las ecuaciones no cambia, no lo repetimos.

Ejemplo:

[...] *Escribimos x=2m+1, y=2n+1 y luego desarrollamos*

$$
\begin{aligned}
x \cdot y &= (2m+1)(2n+1) \\
&= 4mn + 2m + 2n + 1 \\
&= 2(2mn + m + n) + 1.
\end{aligned}
$$

Dado que m y n son enteros, concluimos que….

Referencias

Sundstrom, Ted (2021). *Mathematical Reasoning: Writing and Proof*. Version 2.1 https://scholarworks.gvsu.edu/books/9/, visto el 26/11/2021.

Wilson, Jenny (s/a). *A Primer on Mathematical Proof*. http://www.math.lsa.umich.edu/~jchw/PrimerOnProof.pdf, visto el 4/01/2022.