FACULTAD DE MATEMÁTICAS
PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE

C2030
CIENCIA E INNOVACIÓN DESDE LA UC PARA CHILE Y EL MUNDO

Errores comunes en la escritura de una demostración

Mahsa Allahbakhshi[1], Duvan Henao[1], Ricardo Menares[1] y Natalia Leiva[2]

[1]Facultad de Matemáticas UC

[2]Proyecto Ciencia 2030 UC

Lista de errores comunes

En este documento se presentan y ejemplifican 11 errores comunes al escribir demostraciones matemáticas:

1. **Demostrar $q \to p$ cuando se pidió demostrar $p \to q$.**

2. **Hacer casos especiales y pretender que constituyen una demostración.**

3. **Pasar por alto casos especiales a los que el razonamiento general no aplica.**

4. **Asumir la conclusión en medio del razonamiento.**

5. **No justificar adecuadamente pasos en la demostración.**

6. **Ocupar la misma letra para diferentes variables.**

7. **Usar variables o notaciones no definidas previamente.**

8. **Emplear afirmaciones imprecisas.**

9. **No completar el razonamiento.**

10. **Emplear definiciones y notaciones básicas erróneas.**

11. **Redactar con una estructura lógica global poco clara.**

A continuación se presentan dichos errores comunes en más detalle y con ejemplos:

1. Demostrar $q \to p$ cuando se pidió demostrar $p \to q$.

Un error posible al decodificar los enunciados es demostrar la afirmación recíproca, en lugar de la afirmación original.

Ejemplos:

(a) ***Enunciado:*** Sea n un entero. Si $3n-8$ es impar, entonces n es impar.

Solución errónea: Supongamos que n es impar. Entonces existe un número entero k tal que $n = 2k+1$. Por lo tanto $3n-8 = 3(2k+1)-8 = 6k+3-8 = 6k-5 = 6k-6+1 = 2(3k-3)+1$. Como $3k-3$ es entero, entonces $3n-8$ es impar.

El enunciado pide demostrar que n es impar. Sin embargo, el razonamiento asume que n es impar (lo que es incorrecto, al no ser parte de las hipótesis) y concluye que $3n-8$ es impar (lo que es inútil, pues ya se sabía de la hipótesis).

(b) ***Enunciado:*** Sea $x \in \mathbb{R}$ y $x \neq 4$. Demuestre que si $\dfrac{2x-5}{x-4} = 3$ entonces $x = 7$.

Solución errónea: Sea $x = 7$. Tenemos que $\dfrac{2x-5}{x-4} = \dfrac{2(7)-5}{7-4} = \dfrac{9}{3} = 3$. Por lo tanto si $\dfrac{2x-5}{x-4} = 3$ entonces $x = 7$.

La tesis de este enunciado es x=7. El razonamiento escrito no constituye una demostración de que x=7, pues comienza asumiendo que x=7 (lo que es incorrecto, al no ser parte de las hipótesis). La última frase no hace más que repetir el enunciado.

(c) ***Enunciado:*** Demuestre que la función

$$f : [0,\infty) \to \mathbb{R}^2 \quad f(x) = x^2,$$

es inyectiva.

Solución errónea: sean $x, y \in \mathbb{R}$, con $x = y$. Entonces $x^2 = y^2$, luego $f(x) = f(y)$. Por lo tanto, f es inyectiva.

La definición de inyectividad es:

$$f(x) = f(y) \ \Rightarrow \ x = y.$$

Luego, el razonamiento escrito es erróneo porque comienza por suponer x=y, concluyendo que f(x)=f(y), que debiera ser la hipótesis.

Si bien asumir la conclusión como hipótesis e indagar sus consecuencias puede rendir frutos como parte de una estrategia del tipo "lluvia de ideas", la redacción final de la demostración debe ser una cadena de pasos lógicos en que se deducen nuevas verdades a partir de verdades conocidas (como las hipótesis del enunciado, los axiomas o los teoremas demostrados previamente).

2. **Hacer casos especiales y pretender que constituyen una demostración.**

Es un error comprobar la conclusión en algunos ejemplos concretos y extrapolar que siempre es válida. Por ejemplo, si se quiere demostrar que alguna propiedad es válida para todos los números reales y definimos una variable (como x) para representar un número real arbitrario, no basta con introducir unos cuantos números para x y comprobarlo en esos casos [2].

Ejemplos:

(a) ***Enunciado:*** Si n, m son números enteros de la misma paridad (ambos pares o ambos impares) entonces $n - m$ es par.

Solución errónea:
Caso 1: n y m son ambos pares. Sea $n = 6$ y $m = 4$ que son ambos pares. Entonces $n - m = 2$ que es par.
Caso 2: n y m son ambos impares. Sea $n = 9$ y $m = 7$ que son ambos impares. Entonces $n - m = 2$ que es par.

Lo que declara el enunciado es correcto para todos los enteros de la misma paridad. Sin embargo, este razonamiento demuestra la conclusión sólo cuando $n = 6$ y $m = 4$, y cuando $n = 9$ y $m = 7$. Así, no hay ninguna demostración válida sobre todos los otros posibles valores de n y m que satisfagan la hipótesis.

(b) ***Enunciado:*** Determine el valor de verdad de la siguiente proposición:
para todo $x, y \in \mathbb{R}$, $x^2 + xy - 2y^2 = 0$.

Solución errónea: La proposición es verdadera. Sea x, y igual a un número cualquiera r. Entonces $x^2 + xy - 2y^2 = r^2 + r \cdot r - 2r^2 = 0$. Como elegimos x e y de manera arbitraria, podemos concluir que para todo $x, y \in \mathbb{R}$, $x^2 + xy - 2y^2 = 0$.

Este razonamiento asume que x=y, lo que es una hipótesis extra. Se trata de un caso especial en donde las dos variables son iguales y para este caso especial el enunciado es correcto. Sin embargo, se puede demostrar que el valor de verdad del enunciado es falso, pues la hipótesis considera que x,y son números reales cualesquiera.

Probar casos especiales es una buena forma para familiarizarse con el enunciado antes de presentar una solución, pero no es una solución del problema. La demostración debe dar un argumento riguroso que justifique que la conclusión se cumple en todas las situaciones que satisfacen las hipótesis.

3. Pasar por alto casos especiales a los que el razonamiento general no aplica.

Es un error olvidar los casos especiales en un argumento. A veces el razonamiento es correcto para todos los casos salvo un caso especial.

Ejemplos:

(a) ***Enunciado:*** Determine las soluciones de la ecuación $x^2y = 4y$.

Solución errónea: Al dividir los dos lados de la ecuación por y tenemos $x^2 = 4$. Por lo tanto, las soluciones son que x=-2 e y sea un número real cualquiera, o bien que x=2 e y sea un número real cualquiera.

La solución es errónea porque si y=0 no podemos dividir los dos lados por y. Al dividir por un número real desconocido y, es necesario tratar por separado el caso de que y = 0. De hecho, ninguna de las (infinitas) soluciones en que x toma un valor cualquiera e y=0 fue encontrada en la solución presentada.

(b) ***Enunciado:*** Sean L_1, L_2 dos rectas distintas en el plano. Demuestre que existe una recta L_3 tal que cada punto de L_3 está a igual distancia tanto de L_1 como de L_2.

Solución errónea: sea P el punto de intersección entre L_1 y L_2. Elegimos uno de los ángulos que se forma en P y definimos L_3 como la recta que bisecta tal ángulo. Entonces, cada punto de L_3 se encuentra a igual distancia tanto de L_1 como de L_2.

La solución es errónea porque no considera el caso en que $L1$ y $L2$ son paralelas. En tal caso, no existe un punto P de intersección.

En el error número 2 se hace un razonamiento que es válido para unos pocos valores y se ignora la “infinita gran mayoría” de los valores. En el error número 3, en cambio, se hace un razonamiento válido para una gran cantidad de los valores, pero se pasa por alto una cantidad pequeña de valores excepcionales que requieren un argumento especial. Como antes, la demostración debe dar un argumento riguroso que justifique que la conclusión se cumple en todas las situaciones que satisfacen las hipótesis.

4. **Asumir la conclusión en medio del razonamiento.**

Es un error incorporar la tesis entre un argumento y otro, para deducir otra cosa y continuar el razonamiento. Esto suele llevarnos a no justificar los pasos de la argumentación (error 5).

Ejemplos:

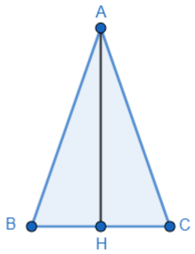
(a) ***Enunciado:*** Demuestre que si x^2 es impar entonces x es impar.

Solución errónea: Supongamos que x^2 es impar. Entonces existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $x^2 = (2k+1)^2$. Por lo tanto $x^2 = xx = (2k+1)(2k+1)$ que implica $x = 2k+1$ que es un número impar.

Al escribir $x^2 = (2k+1)^2$ se está asumiendo que x es un número impar. No podemos usar esa información, pues es lo que queremos demostrar.

(b) ***Enunciado:*** Demuestre que en un triángulo isósceles, la bisectriz del ángulo opuesto a la base, corta a la base en su punto medio y es perpendicular a ella.

Solución errónea: Sea $\triangle ABC$ un triángulo isósceles con $\overline{AB} = \overline{AC}$. Sea AH la bisectriz del ángulo $\angle BAC$.



Los triángulos $\triangle ABH$ y $\triangle ACH$ son congruentes por ALA porque $\angle BAH = \angle CAH$ pues AH es la bisectriz, AH es común y $\angle AHB = \angle AHC = 90°$ pues la bisectriz coincide con la altura correspondiente al lado AB. Entonces $\overline{BH} = \overline{CH}$; es decir, AH corta la base en su punto medio y es perpendicular a AB.

Este razonamiento está asumiendo $\angle AHB = \angle AHC = 90°$ que es lo mismo que decir la bisectriz es perpendicular a la base. No podemos usar esta información como parte del razonamiento, pues es una parte de lo que queremos demostrar.

Antes de abordar un problema, para entenderlo mejor, es una buena idea analizar lo que queremos demostrar, manipular la tesis, escribir proposiciones equivalentes o incluso simplificarlo para que se nos ocurran ideas. Sin embargo, en la solución que queremos presentar nunca podemos asumir la tesis o su equivalente.

5. No justificar adecuadamente pasos en la demostración.

En el curso de una demostración, debe darse una justificación de cualquier información que no sea obvia. Es un error omitir tal justificación, pues una demostración debe poder convencer a cualquier lector: a ti, a tu amigo y a tu enemigo.

Ejemplos:

(a) ***Enunciado:*** Sean $a, b \in \mathbb{R}^+$. Demuestre $a^2 < b^2 \to a < b$.

Solución errónea 1: Supongamos que $a^2 < b^2$. Calculamos la raíz cuadrada de los dos lados $\sqrt{a^2} < \sqrt{b^2}$. Entonces $a < b$.

Solución errónea 2: Sean $a, b \in \mathbb{R}^+$ y $a^2 < b^2$. Calculamos la raíz cuadrada de los dos lados $\sqrt{a^2} < \sqrt{b^2}$. Entonces $a < b$.

En la primera solución errónea, se calcula la raíz sin discutir el sentido de la desigualdad. Ni siquiera se considera la información que a, b son reales positivos. No es cierto que $a^2 < b^2$ implica $a < b$ (por ejemplo $1^2 < (-2)^2$, pero 1 no es menor que -2).

En la segunda solución errónea, aunque se considera la información que a, b son reales positivos, no se justifica por qué al calcular la raíz se mantiene el sentido de la desigualdad.

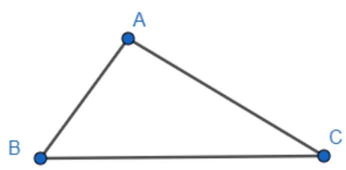
(b) ***Enunciado:*** Sean $x, y \in \mathbb{R}$, $x \neq 3$. Decida si $x^2y = 9y$ implica que $y = 0$.

Solución errónea: Supongamos que $x^2y = 9y$. Entonces $(x^2 - 9)y = 0$. Como $x \neq 3$, $x^2 \neq 9$, entonces $x^2 - 9 \neq 0$. Ahora dividimos los dos lados de la ecuación $(x^2 - 9)y = 0$ por $(x^2 - 9)$ que implica que $y = 0$.

El razonamiento es incorrecto, porque x distinto de 3 no implica que $x^2 \neq 9$. Si el autor o la autora hubiera justificado cada paso, se habría dado cuenta de que, para que $x^2 \neq 9$, debemos tener x distinto de 3 y también distinto de -3.

(c) ***Enunciado:*** Demuestre que en todo triángulo la suma de las longitudes de dos lados cualesquiera es siempre mayor a la longitud del lado restante.

Solución errónea: Considera el triángulo $\triangle ABC$.



Como no hay ningún camino más corto que un camino directo entonces $AB + BC \geq AC$.

Este razonamiento está repitiendo el enunciado, sin un argumento que lo justifique, por lo que no es una demostración.

Ten en consideración que justificar adecuadamente cada paso no solo es necesario para convencer a cualquier lector, nos recuerda los axiomas o teoremas y también nos ayuda a evitar los posibles errores en el camino.

6. Ocupar la misma letra para diferentes variables.

Es un error identificar con un mismo símbolo (por ejemplo, "k") dos variables distintas en una demostración. Si se usa una misma letra quiere decir que las dos variables son iguales o tienen una dependencia. Tal dependencia debería ser dada en la hipótesis. Si no, estás asumiendo algo que no es parte de la hipótesis.

Ejemplos:

(a) ***Enunciado:*** Sean m, n números enteros, con m par y n impar. Entonces $3m + 5n$ es impar.

Solución errónea: Como m es par existe k entero tal que $m = 2k$. Por otro lado, como n es impar, existe k entero con $n = 2k + 1$. Por lo tanto $3m + 5n = 3(2k) + 5(2k + 1) = 6k + 10k + 5 = 16k + 5 = 16k + 4 + 1 = 2(8k + 2) + 1$. Como $8k + 2$ es un entero, entonces $3m + 5n$ es impar.

No hay ninguna relación entre m y n en la hipótesis. Sin embargo, el razonamiento está asumiendo (sin querer) que $n = m + 1$, pues se usa la misma letra k para caracterizar ambas variables.

(b) ***Enunciado:*** Determine el valor de verdad de la siguiente proposición:
para todo $x, y \in \mathbb{R}$, $x^2 + xy - 2y^2 = 0$.

Solución errónea: La proposición es verdadera. Sea x, y igual a un número cualquiera r. Entonces $x^2 + xy - 2y^2 = r^2 + r \cdot r - 2r^2 = 0$. Como elegimos x e y de manera arbitraria, podemos concluir que para todo $x, y \in \mathbb{R}$, $x^2 + xy - 2y^2 = 0$.

Este razonamiento asume que $x = y$, lo que es una hipótesis extra. De hecho, se puede demostrar que el enunciado es falso (hay valores de x, y para los que no vale la conclusión, por ejemplo $x = 0$, $y = 1$).

En una demostración, es importante usar símbolos diferentes para conceptos diferentes o cantidades diferentes. Nota que este error a veces es una instancia particular del error número 2, que es hacer casos especiales y pretender que constituyen una demostración.

7. Usar variables o notaciones no definidas previamente.

Es un error no asignar explícitamente un significado a un símbolo como x dentro de una demostración. Todas las notaciones o abreviaturas no estándar deben estar definidas. Por ejemplo “sea x un número real”, o “supongamos que f es una función continua de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$” [2].

Ejemplos:

(a) ***Enunciado:*** Demuestre que si un número es impar entonces su cuadrado también es impar.
Solución errónea: Tenemos $x = (2k+1)^2 = 4k^2 + 2k + 1 = 2(2k^2 + k) + 1$ que es un número impar.

En este razonamiento, no están definidos ni x ni k. Si suponemos que k es un número natural, entonces la letra x no puede representar un número impar arbitrario, pues tiene la propiedad de ser el cuadrado de un número impar. Así, x no puede representar, por ejemplo, el número impar 3. Esta manera de escribir una solución es muy confusa para el lector.

Frente a un enunciado con la forma $p \to q$, es una buena práctica reescribir primero el enunciado presentando las variables. El enunciado de arriba se traduce como: “Demuestre que si x es impar entonces x^2 también es impar”. Luego, para la demostración, uno puede empezar presentando otra variable k diciendo que si x es impar entonces existe un número natural k tal que $x = 2k + 1$.

8. Emplear afirmaciones imprecisas.

Un argumento no puede ser riguroso si involucra enunciados ambiguos o definiciones imprecisas, pues imposibilita formular un razonamiento que conecte tales enunciados o definiciones.

Ejemplos:

(a) ***Enunciado:*** Sea n un número entero. Demuestre que si $n > 1$ entonces $n^3 > n^2$.

Solución errónea: Como la función cubica crece más rápido que la función cuadrática entonces $n^3 > n^2$.

Este razonamiento no es una solución concisa. No está claro lo que significa "una función crece más rápido que la otra".

(b) ***Enunciado:*** Demuestre que toda suma de cinco números naturales consecutivos es divisible por 5.

Solución errónea: La suma de los primeros 5 números naturales consecutivos es $1+2+3+4+5 = 15$, que es divisible por 5. Ahora la suma de las siguientes 5 números naturales consecutivos es mayor por 5 que esta suma (cada uno de los 5 números crece por 1 entonces la suma crece por 5). Por lo tanto esta suma también es divisible por 5. Así sigue, cada vez se agrega 5 a la suma anterior, que era divisible por 5. La nueva suma, entonces, es de la forma $5k + 5$, para algún número natural k. Esta expresión puede escribirse como $5(k + 1)$, así que siempre tenemos que la suma es divisible por 5.

Con la excepción de la primera frase, el argumento es impreciso, pues no explicita que se trata de una demostración por inducción. En particular, habría sido necesario expresar más claramente (en el paso inductivo) qué significa que un número "crece por 1". [1]

Escribir una solución difiere de tener una idea de cómo abordar un problema. En los dos ejemplos, la idea de solución es correcta. Muchas veces nos pasa que tenemos el cuadro completo en nuestra mente y es un logro excelente. Sin embargo, es solo una parte de resolver un problema. La segunda parte es desarrollar la idea de una manera precisa para poder transmitirla a cualquier lector. Muchas veces cuando logramos escribir una solución rigurosa, esta se ve totalmente diferente de nuestra idea inicial e inmadura.

[1] En la solución presentada se detecta también el error 5: "No justificar adecuadamente pasos en la demostración", pues no se justifica por qué la suma crece por 5.

9. No completar el razonamiento.

Tener "los ingredientes" del razonamiento, sin explicar cómo dan lugar a la tesis no constituye una demostración. Esto se puede dar cuando nos quedamos solo en la fase de exploración del problema y no damos un contraejemplo concreto.

Ejemplos:

(a) ***Enunciado:*** Determine el valor de verdad de la siguiente proposición:

El cuadrado de un entero es siempre un número par.

Solución errónea: Sea x un número entero. Supongamos que $x^2 = 2k$ para algún $k \in \mathbb{Z}$. Entonces x es divisible por 2; es decir, x es un número par.

Lo que está escrito en este razonamiento no presenta errores; el error está en no haber terminado el razonamiento. Concretamente, faltó ver que, entonces, al elegir un número impar se encontraba un contraejemplo. Una solución correcta sería: "La proposición es falsa, puesto que 5 es un entero y su cuadrado no es par". Esto nos revela que, en este problema, ni siquiera era necesario escribir lo que pensamos en la primera fase de la construcción de la demostración.

(b) ***Enunciado:*** Demuestre que la suma de dos números reales no siempre es mayor que ambos números.

Solución errónea: Sea $x, y \in \mathbb{R}$. Para que $x + y$ sea mayor que x entonces y debe ser un número positivo y para que $x + y$ sea mayor que y entonces x debe ser un número positivo.

Al igual que en el ejemplo anterior, faltó concluir, a partir de esas deliberaciones, que era posible encontrar contraejemplos. En este caso bastaría, por ejemplo, con decir: "La suma de 5 y -3 no es mayor que 5."

Como ya hemos visto, escribir una solución difiere de tener una idea sobre cómo abordar un problema. En los dos ejemplos anteriores, en vez de intentar plantear un argumento general, es suficiente construir un contraejemplo para hacer una demostración.

10. Emplear definiciones y notaciones básicas erróneas.

Es un error confundir las definiciones y notaciones al momento de aplicarlas en problemas.

Ejemplos:

(a) ***Enunciado:*** Sea $a, b, c \in \mathbb{R}^+$. Demuestre que $a + (b \times c) \in R^+$.

Solución errónea: Sea $a, b, c \in \mathbb{R}^+$. Según el axioma de distribución del cuerpo R tenemos $a+(b\times c) = (a + b) \times (a + c)$. Como $a + b \in \mathbb{R}^+$ y $a + c \in \mathbb{R}^+$ entonces $(a + b) \times (a + c) \subseteq \mathbb{R}^+$.

Existen dos errores en este razonamiento. Primero, el axioma de distribución no es lo que está escrito aquí. La multiplicación se distribuye en la suma y no viceversa. Por ejemplo,

$$2 + (3 \cdot 4) = 2 + 12 = 14,$$

lo que no es igual a

$$(2 + 3)(2 + 4) = 30.$$

El segundo error es la confusión entre la notación $\in$ y $\subseteq$. Note que $(a + b)(a + c)$ no es un subconjunto de $\mathbb{R}$, es un número que pertenece a $\mathbb{R}$.

(b) ***Enunciado:*** Decida sobre el valor de verdad de la siguiente proposición: Existen cuatro números naturales consecutivos cuya suma es divisible por 4.

Solución errónea: La suma de los primeros 4 números naturales consecutivos $1 + 2 + 3 + 4 = 10$ no es divisible por 4. Entonces la proposición es falsa.

La solución cae en el error (relativamente frecuente en el primer semestre) de confundir un "existe" con un "para todo". El enunciado no dice que la suma de cualesquiera 4 números naturales consecutivos es divisible por 4, solo pide la existencia de tales números consecutivos. Es correcto que la suma de los primeros 4 números naturales consecutivos no es divisible por 4; sin embargo, eso no garantiza que para cualesquier 4 números naturales consecutivos ocurra lo mismo.

Las definiciones y notaciones básicas están disponibles en los cursos y materiales de apoyo ahí proporcionados. La idea no es memorizarlas, sino aplicarlas en los problemas de manera correcta. De esta forma, poco a poco se transforman en conocimientos incrustados en nuestra mente, de los que luego podemos disponer con facilidad.

El gran aporte de las notaciones es que nos permiten describir de manera concisa, coherente y sencilla relaciones generales, facilitando su comprensión y estudio. El siguiente texto se encuentra en el libro del matemático iraní Al-Khowarizmi (780-850 A.C.):

"La cosa y diez es multiplicada por la cosa menos diez, entonces esto es lo mismo que si se dijera la cosa multiplicada por la cosa, es un cuadrado positivo, y diez por la cosa es diez cosas positivas; menos diez por la cosa es diez cosas negativas, ahora restamos lo negativo de lo positivo, y solo queda un cuadrado. Menos diez multiplicado por diez es cien, que se debe sustraer del cuadrado. Por lo tanto, resulta un cuadrado menos cien."

Usando lenguaje algebraico, donde la letra x representa "la cosa", todo este texto quiere decir:

$$(x + 10)(x - 10) = x \cdot x + 10x - 10x - 10 \cdot 10 = x^2 - 100.$$

Queda a la vista la ventaja de ocupar las notaciones.

11. Redactar con una estructura lógica global poco clara.

Es un error insertar una serie de afirmaciones o cálculos sin un hilo conductor o un orden lineal claro. Estos no se consideran una demostración completa si no se explica cómo se conectan y por qué implican el resultado final [2]. Este problema suele ir de la mano con la ausencia de oraciones completas.

Ejemplos:

(a) ***Enunciado:*** Para cada entero positivo n, si n^2 es un múltiplo de 3 entonces n es un múltiplo de 3.
Solución errónea: Sea n un entero tal que $n^2 = 3x$ con $x \in \mathbb{Z}$. $3|n^2$. Cuando un primo divide a un producto, divide a uno de los factores. Entonces $3|n$. Si n^2 es un múltiplo de 3, n es también un múltiplo de 3.

"Sea n un entero tal que $n^2 = 3x$ con $x \in \mathbb{Z}$" es una buena manera de empezar una solución. Sin embargo, es muy abreviado. Este argumento debería estar más claramente vinculado con la hipótesis del enunciado suponiendo que n^2 es un múltiplo de 3 antes de afirmar que $n^2 = 3x$ con $x \in \mathbb{Z}$.
Tampoco está claro de donde viene "$3|n^2$". Si se deduce del argumento anterior entonces falta un hilo conector.

(b) ***Enunciado:*** Demuestre que la suma de cada 5 números naturales consecutivos es divisible por 5.
Solución errónea: Sea $x \in \mathbb{N}$, tenemos $x + (x+1) + (x+2) + (x+3) + (x+4) = 5x + 10 = 5(x+2)$ que es divisible por 5.

No es claro por qué está escrito

$$x + (x+1) + (x+2) + (x+3) + (x+4).$$

Cuando un lector o una lectora lee una solución debe sentirse invitado a una comunicación fluida donde cada ecuación tiene un apoyo verbal. Por ejemplo podemos decir: Sea x un número natural. La suma de los 5 números naturales consecutivos empezando por x se representa por:

$$x + (x+1) + (x+2) + (x+3) + (x+4),$$

que es igual a $5x + 10$.
El argumento termina de manera vaga. No está claro el sujeto de la oración " que es divisible por 5."

Escribe tus demostraciones con un orden razonable, pues el propósito es comunicar tu razonamiento al lector o la lectora. Como guía, puedes consultar las demostraciones en el material bibliográfico y en clase. Un buen ejercicio es releer tus demostraciones, imaginando cómo las vería otra persona, o bien pedirle a otra persona que las revise.

Ejemplos misceláneos

En los siguientes ejemplos encontramos buenos ejercicios para analizar un argumento en detalle.

1. ***Enunciado:*** Para cada entero positivo n, si n^2 es un múltiplo de 3 entonces n es un múltiplo de 3.

   Solución errónea: Supongamos que n^2 es un entero positivo impar que es divisible por 3. Entonces $n^2 = (3n+1)^2 = 9n^2 + 6n + 1 = 3n(n+2) + 1$. Por lo tanto n^2 es divisible por 3. Ahora supongamos n^2 es un entero positivo par. Entonces $n^2 = (3n)^2 = 9n^2 = 3n(3n)$. Por lo tanto n^2 es un múltiplo de 3. Si factorizamos n^2 tenemos $3n(3n)$ que implica que n es un múltiplo de 3.

   Este argumento tiene varios problemas:

   (a) Suponer que n^2 es un entero positivo impar no es un error pero la división entre pares e impares es irrelevante en este problema (error 11).

   (b) Existen 4 errores en "$n^2 = (3n+1)^2 = 9n^2 + 6n + 1 = 3n(n+2) + 1$". Primero, la suposición de ser impar fue para n^2 y no n (error 5). Segundo, en $n = 3n + 1$ se está usando la letra n para dos cosas diferentes en la misma ecuación (error 6). Tercero, un nmero impar se representa por $n = 2k + 1$ y no $n = 3k + 1$ (error 10). Cuarto, $3n(n)$ es $3n^2$ y no $9n^2$ (error 5).

   (c) "Por lo tanto n^2 es divisible por 3" no se deduce de "$n^2 = (3n+1)^2 = 9n^2 + 6n + 1 = 3n(n+2) + 1$" (error 5).

   (d) Deducir "Por lo tanto n^2 es divisible por 3" no puede ser de utilidad porque ya lo sabemos de la hipótesis del enunciado (error 1).

   (e) "Ahora supongamos n^2 es un entero positivo par." Como mencionamos antes, no es una suposición errónea pero la división entre los casos pares y impares es poco probable que sea til en este problema (error 11).

   (f) Existen 2 errores en "Entonces $n^2 = (3n)^2 = 9n^2 = 3n(3n)$". Primero, como el caso anterior, la suposición de ser par fue para n^2 y no n (error 5). Segundo, en $n = 3n$ se está usando la letra n para dos cosas diferentes en la misma ecuación (error 6).

   (g) "Por lo tanto n^2 es un mltiplo de 3" no es incorrecto pero no se deduce de de la igualdad anterior (error 5).

   (h) "Si factorizamos n^2 tenemos $3n(3n)$" está repitiendo una parte que está escrito en $n^2 = (3n)^2 = 9n^2 = 3n(3n)$", entonces no es un error nuevo. Sin embargo, como la palabra "factor" está refiriendo a una expresión, el lector debe asumir que el autor quiere decir que factorizamos $9n^2$ en $3n(3n)$ (error 11).

   (i) "que implica que n es un mltiplo de 3." no es correcto. Incluso si suponemos que la frase anterior quería decir $n^2 = (3m)(3m)$, todavía no podemos deducir que n es un mltiplo de 3. Uno debe exhibir 3 como un factor de n y no de n^2 (error 5). [1]

2. ***Enunciado:*** Demuestre que si $x > 3$ entonces $2x > \sqrt{x^2 + 5x + 12}$.

Solución errónea:

$$\begin{aligned}
&2x > \sqrt{x^2 + 5x + 12} \\
&4x^2 > x^2 + 5x + 12 \\
&3x^2 - 5x - 12 > 0 \\
&\frac{5 \pm \sqrt{25 + 144}}{6} \\
&x < -4/3 \ \vee \ x > 3.
\end{aligned}$$

Escribir esta solución es muy común, porque corresponde a la manera en que con frecuencia se piensa el problema. Sin embargo, escribir la solución es un ejercicio diferente que va en el orden inverso: se parte desde lo más sencillo, o lo que ya se sabe que es cierto, y en cada paso se deduce una nueva verdad a partir del conocimiento anterior. Las complicaciones que. en este ejemplo, se producen al empezar por la conclusión y trabajar hacia atrás hacia la hipótesis, son:

(a) Redactar con una estructura lógica global poco clara (error 11). No queda claro que el alumno/la alumna comprende que la demostración va en el orden correcto, lo que en este caso significa que debe leerse desde abajo hacia arriba: "si x es mayor que tres entonces $3x^2 - 5x - 12$ es mayor que cero," etc.

(b) No justificar adecuadamente pasos en la demostración (error 5). No se justifica el paso desde

$$4x^2 > x^2 + 5x + 12$$

hasta

$$2x > \sqrt{x^2 + 5x + 12}$$

Por ejemplo, si $x = -10$ entonces $4x = 400$, lo cual es mayor que $x + 5x + 12$, que es 62. Pero $2x$ no es mayor que la raíz cuadrada, porque -20 es negativo mientras que la raíz cuadrada siempre es positiva.

Una demostración correcta (la cual se obtiene "pasando en limpio" la demostración encontrada al reflexionar sobre el problema, pero ahora escribiéndola en el orden correcto y preocupándose especialmente de justificar el paso crítico) es la siguiente:

$$\begin{aligned}
&x > 3 \\
\Rightarrow\ &3x^2 - 5x - 12 > 0 \\
\Rightarrow\ &4x^2 > x^2 + 5x + 12 \\
\Rightarrow\ &2x > \sqrt{x^2 + 5x + 12}.
\end{aligned}$$

En el último paso usamos que $2x > 0$ (lo cual es cierto porque estamos suponiendo que $x > 3$), para poder pasar desde una desigualdad a la desigualdad de sus raíces cuadradas.

3. ***Enunciado:*** Demuestre que existe $x \in \{1, -1, 3\}$ tal que para todo $y \in \{2, 1, 5\}$ tenemos $x < y$.

   Solución errónea: Tenemos $1 < 2$, $-1 < 1$ y $3 < 5$. Por lo tanto está demostrado que $x < y$.

   Este argumento tiene varios problemas:

   (a) El enunciado pide la existencia de un elemento en el conjunto $\{1, -1, 3\}$ tal que dicho elemento sea menor que todos los elementos en el conjunto $\{2, 1, 5\}$. Este elemento es -1, pues es menor que 2, 1 y también 5. El autor o la autora de la solución errónea está demostrando que para cada elemento x en el conjunto $\{2, 1, 5\}$ existe un elemento y en el conjunto $\{1, -1, 3\}$ tal que $y < x$ (error 10).

   (b) La redacción empieza con 3 desigualdades correctas pero no está claro de donde vienen (error 11).

   (c) El argumento ocupa dos letras x, y que no están definidas previamente en la solución errónea (error 7).

References

[1] Selden, Annie & Selden, John (2003). "Validations of Proofs Considered as Texts: Can Undergraduates Tell Whether an Argument Proves a Theorem?". Journal for Research in Mathematics Education, Vol. 34, No. 1,4-36.

[2] Wilson, Jenny (s/a). A Primer on Mathematical Proof. http://www.math.lsa.umich.edu/ jchw/PrimerOnProof.pdf, visto el 4/01/2022.